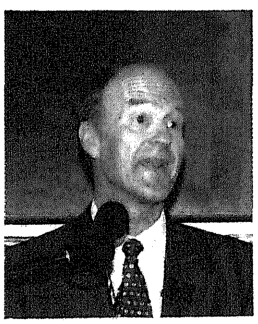
Platten, Scheiben und Schalen

Ein Berechnungsmodell für gängige Statikprogramme

In der Vortragsreihe des Forums 1 im Kongreßzentrum Karlsruhe anläßlich des 100-jährigen Jubiläums von „bauen mit holz" im Oktober, hielt Prof. Dr.-Ing. H. Kreuzinger von der TU München einen Vortrag zur Konstruktion und Berechnung von Flächentragwerken, Platten, Scheiben und Schalen. Die Vorschläge von Prof. Kreuzinger zur Berechnung sollte für die Holzbauplaner Anreiz sein, sich mit dem Thema auseinanderzusetzen.



Prof. Dr.-Ing. H. Kreuzinger: In der Regel sind keine speziellen Programme für vielschichtige Holzbauteile notwendig.

Neue Holzbau-Möglichkeiten mit Problemen

Professor Kreuzinger zeigte in seinem Vortrag auf, wie gängige Programme für Flächen- und Plattenberechnungen, die in vielen Ingenieurbüros bereits vorhanden sind, für komplexe Holzflächen eingesetzt werden können.

Er stellte zunächst die grundsätzlich neuen Material-Errungenschaften für tragende Bauteile vor. Sie zeichnen sich – was das Tragwerk angeht – aus durch:
„vom Stab zur Fläche" d.h. „von der Linie zur Ebene".

Die Regelwerke des Holzbaus behandeln Flächentragwerke nur in Form von Scheiben, wobei auch nur stark vereinfachte Rechenmodelle angegeben sind. Flächentragwerke unter Biegebeanspruchung rechtwinklig zur Plattenebene sind nicht behandelt.

Eine weitere Herausforderung besteht in der Vielfalt des Schichtenaufbaus, der z. T. schon in den neuen Produkten zu finden ist und der durch Werkstoffkombinationen und Wahl der Verbindungstechnik nahezu beliebig ausgeweitet werden kann.

Die Vorteile bzw. Vorzüge von Flächentragwerken, wie geringe Bauteildicke, mehrachsige Lastabtragung, Lastverteilung bei Punktlasten usw., vermerkte Kreuzinger als Marktmöglichkeiten, die dem Holzbau neu erschlossen werden können. Mit einigen Beispielen zeigte er, daß die wenigen, früheren,

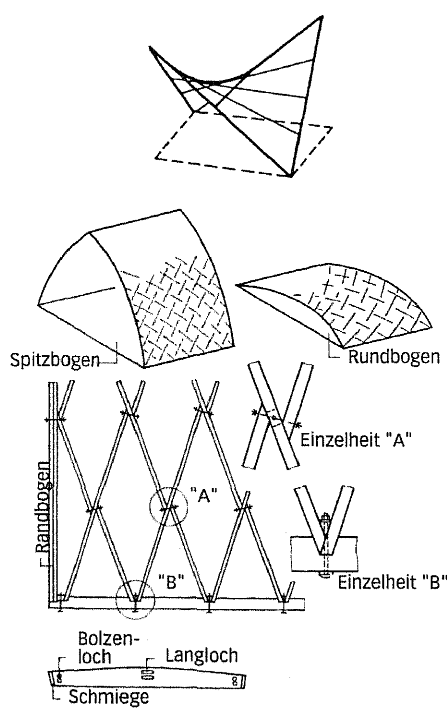


***Bild 1**: Flächige Holztragwerke in Schalenformen (oben: Hypar-Schale, unten: Zollbauweise)*

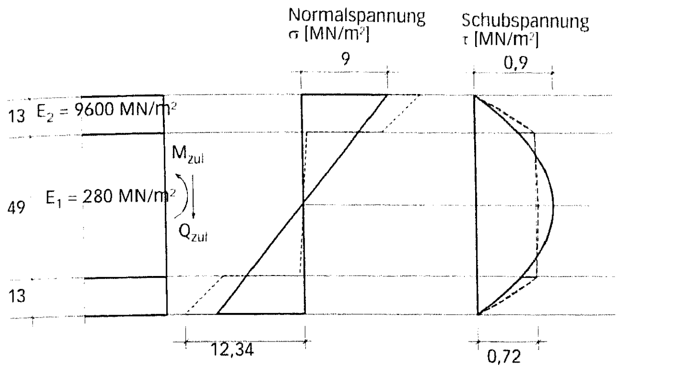
flächigen Holzbau-Auseinandersetzungen mit dem Problem der Fläche Schalen waren. Die maßgeblichen Beanspruchungen bei doppelt gekrümmten Schalen sind Normalkräfte in der Schalenebene, bei einsinnig gekrümmten Schalen liegt eine stabbogenartige Beanspruchung vor (**Bild 1**). Daraus konnten die Beanspruchungen der Bestandteile der Tragwerke berechnet werden. Die Plattentheorie oder die Theorie biegesteifer Schalen wurden weniger zur Berechnung herangezogen.

Problemstellung

Holz ist aufgrund seines natürlichen Gefüges stark anisotrop. Bei vielen modernen Materialkompositionen und -kombinationen ergeben sich durch Schichtung, Ausrichtung und Verbindungstechniken zusätzliche Merkmale der Anisotropie. Natürliche und konstruktive Anisotropie vermengen sich. Dazu kann eine nachgiebige Verbindung der einzelnen Teile kommen. Die Verhältnisse sind, wenn man es genau nimmt, nur noch schwerlich überschaubar und theoretisch nur noch mit äußerst aufwendigen Berechnungen, z.B. der Finite-Elemente-Methode, beschreib- und berechenbar.

Reine Biegung unproblematisch

Am Beispiel einer Dreischichtplatte veranschaulichte Kreuzinger die tatsächlichen Verhältnisse und die rechnerische Bewertung mit einem – auch in der Zulassung angesetzten homogenen Rechteckquerschnitt (**Bild 2**). Er zeigte, daß sich durch das Heranziehen von Analogien die zutreffenden, wenn auch im Detail nicht wirklichkeitsgetreuen, theoretischen Abbildungen ergeben. Für die Berechnung ergeben sich erhebliche Vereinfachungen. Für reine Biegung läßt sich der Spannungsverlauf über die Querschnitts-



Für einen 1 m breiten Streifen gilt

zul σ = 9 MN/m² $\Rightarrow$ M_{zul} = 8,44 kNm —— Zulassung

zul τ_{xz} = 0,9 MN/m² $\Rightarrow$ Q_{zul} = 45 kN ------ Verbundquerschnitt

***Bild 2**: Vergleich von Spannungsverläufen und Spannungen am Beispiel der Dreischichtplatte Multiplan K1, d = 75 mm*

höhe nach der Verbundtheorie mit den unterschiedlichen Kennwerten der Elastizitätsmoduln der einzelnen Schichten berechnen.

[Für das Beispiel:
$I_{y\ eff.} = 2 \cdot 1{,}3 \cdot 3{,}1^2 + 4{,}9^3/12 \cdot 280/9600$
$I_{y\ eff.} = 25{,}3\ cm^3$
$I_{y\ eff.\ Vergl.} = 7{,}5^3/12;$
$= 35{,}2\ cm^3$

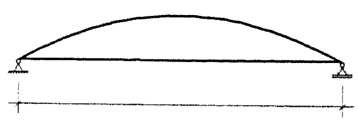
$\sigma_{Vergl.} = 25{,}3 / 35{,}2 \cdot \sigma_{tatsächl.}$
$= 0{,}72 \cdot \sigma_{tatsächl.}$
(Zulassungswert: 0,72 = 9,0/12,34)]

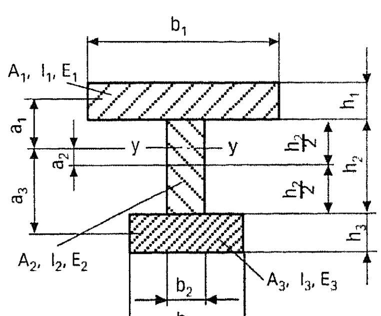
Problem: Schub

Problematischer ist es, Vergleichswerte für den Schub zu finden, weil im allgemeinen die Vereinfachung der Technischen Biegetheorie, daß der Querschnitt eben bleibt, nicht mehr gilt: die Schichten können nachgiebig miteinander verbunden sein, die unterschiedlichen Schichten haben unterschiedliche Schubmoduln und die Schubverformung ist zu berücksichtigen. Ohne Berücksichtigung der Schubverformung werden in DIN 1052 und EC 5 zur Erfassung der Nachgiebigkeit der Verbindung der Schichten Formeln für bis zu dreiteiligen Querschnitten angegeben die folgende Voraussetzungen beinhalten:

- Einfeldträger mit der Spannweite l,
- sinusförmige Verformungslinie, d.h. sinusförmige Streckenlast.

Bild 3 zeigt für einen dreiteiligen Querschnitt die Formeln nach DIN 1052 oder EC 5. Das zugehörige statische System ist der Einfeldträger mit der Spannweite l. Liegen diese Systemverhältnisse nicht vor, z.B. bei Durchlaufträgern oder bei Flächentragwerken, muß die Spannweite l – der Abstand zwischen den Momentennullpunkten – geschätzt werden. Aber auch dann bleibt es eine Näherung, wenn die Lasten nicht entsprechend sinusförmig verlaufen.



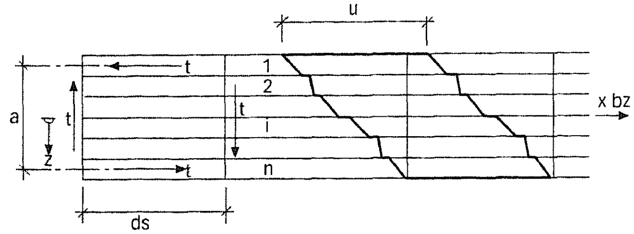


$$\text{ef } I = \sum_{i=1}^{3} (n_i \cdot I_i + \gamma_i \cdot n_i \cdot A_i \cdot a_i^2)$$

$$\gamma = \frac{1}{1 + \dfrac{\pi^2 E \cdot A \cdot e}{\boxed{l^2} \cdot C}}$$

?

***Bild 3**: Biegeträger aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen, oben Lastverteilung, unten Formeln nach DIN 1052*



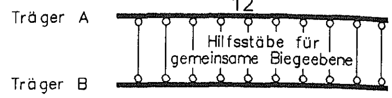
$$u = \frac{t \cdot a^2}{S} = t \cdot \left\{ \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{c_i} + \frac{d_1}{2G_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{d_i}{G_i} + \frac{d_n}{2G_n} \right\}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{a^2} \cdot \left\{ \sum_{1}^{n-1} \frac{1}{c_i} + \frac{d_1}{2G_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{d_i}{G_i} + \frac{d_n}{2G_n} \right\}$$

mit
n Zahl der Schichten
c_i nachgiebige Verbindungen zwischen der Schicht i und i + l
d_i Dicke
G_i Schubmodul (G_{xy} bzw. G_{yz})
b = 1

***Bild 4**: Ersatzsteifigkeit S (S_{xz} bzw. S_{yz}) für nachgiebigen Verbund (Näherung)*

$$B_A = \sum E_i \cdot \frac{d_i^3}{12} \cdot b_i \,;\, S = \infty$$



$$B_B = \sum E_i \cdot d_i \cdot z_i^2 \cdot b_i \,;\, S \text{ nach Bild 4}$$

$$\sigma_{Axi} = \frac{M_A}{B_A} \cdot E_i \cdot \frac{d_i}{2}$$

$$t_{Ai} = \frac{Q_A}{B_A} \cdot E_i \cdot \frac{d_i^3}{12} \cdot b_i \cdot \frac{1{,}5}{d_i}$$

$$\sigma_{Bxi} = \frac{M_B}{B_B} \cdot E_i \cdot z_i$$

$$t_B = \frac{Q_B}{a} \,;\, \text{1. Näherung}$$

$$t_{Bi,i+1} = \frac{Q_B}{B_B} \cdot \sum_{i+1}^{n} E_i \cdot z_i \cdot d_i \,;\, \text{2. Näherung}$$

***Bild 5**: Ein Träger aus Schichten = Träger A + Träger B, Schubanalogie*

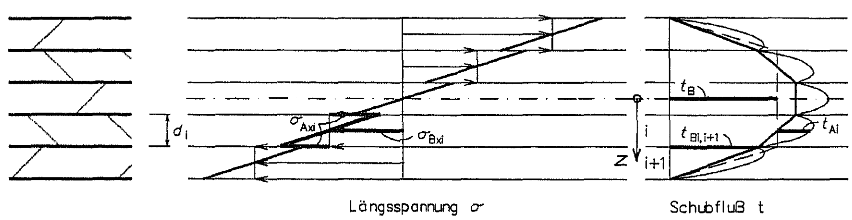


***Bild 6**: Normalspannungen und Schubfluß nach dem Berechnungsmodell*

Problemlösung Schub

Der Ansatz von Kreuzinger „begradigt" Schubspannung und Schubverformung durch Näherungen:

- Der Schubfluß wird über die Querschnittshöhe bis zu den Mittellinien der beiden Decklamellen als konstant angenommen. Das Gleichgewicht ist durch Flächengleichheit der tatsächlichen und genäherten Schubfläche gesichert.

- Die Schubverformungen des Gesamtquerschnitts werden „begradigt", indem die gesamte Verschiebung u (unter gleichbleibendem Schubfluß siehe oben) auf die gesamte Höhe bezogen wird. Damit ist eine Einzahlangabe z.B. in Form eines Ersatz G-Moduln oder einer Schubsteifigkeit möglich.

ild 4 zeigt den Berechnungsansatz. 'ie aus dem Bild zu erkennen ist, sind ier auch mechanische Schubverbin- ɪngen berücksichtigt.

[Für das Beispiel der Dreischichtplatte:

$$u = t \cdot \left(2 \cdot \frac{1{,}3}{2 \cdot 500} + \frac{4{,}9}{380}\right)$$

$$u = t \cdot 0{,}0155$$

$$G^* = \frac{a \cdot t}{u} = \frac{6{,}2}{0{,}0155} = 400 \text{ N/mm}^2]$$

Biegung der einzelnen Schichten Zusammenwirken der Schichten

Eine einzelne Schicht i des Querschnitts erhält Längsspannungen:

- aus der Verkrümmung der Schicht eine Biegespannung,
- aus der Schubkraft eine Längskraftspannung.

Die Biegespannung ist von der Biegesteifigkeit der Schicht abhängig die Normalkraftspannung von der Nachgiebigkeit der Schubverbindung und dem Abstand der Schicht von der Schwerachse.

Die beiden Wirkungen werden durch zwei Träger A und B nach **Bild 5** und **6** erfasst. Beide Träger müssen gleiche Verformung aufweisen. Mit dieser Schubanalogie für die Nachgiebigkeit der Verbindung zwischen den Schichten kann ein übliches EDV-Programm verwendet werden, bei dem zwei Träger durch Hilfsstäbe verbunden werden, die eine gemeinsame Biegelinie der beiden Träger erzwingen. Das EDV-Programm muß Schubverformungen berücksichtigen können. Aus der EDV-Berechnung folgen Schnittgrößen für die beiden Träger.

Die Schnittgrößen M und Q des Trägers A werden den einzelnen Schichten entsprechend dem Verhältnis Biegesteifigkeit der Schicht i, $B_{Ai} = E_i d_i^3/12$, zur Summe dieser Werte zugeteilt. Für jede Schicht errechnet sich dann eine Biegespannung und ein parabelförmiger Schubfluß.

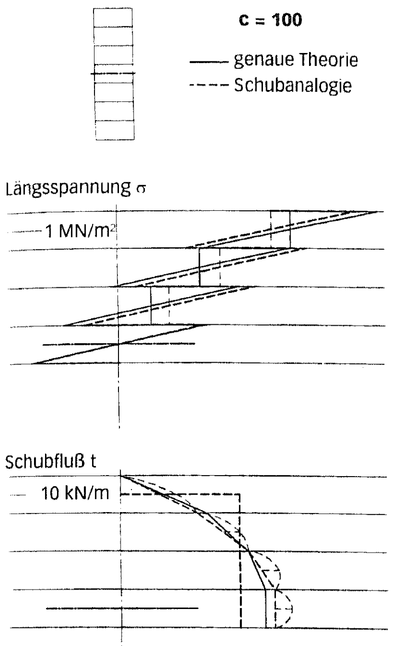


***Bild 7**: Normalspannung σ und Schubfluß t für c = 100, Vergleich genaue Theorie/Schubanalogie*

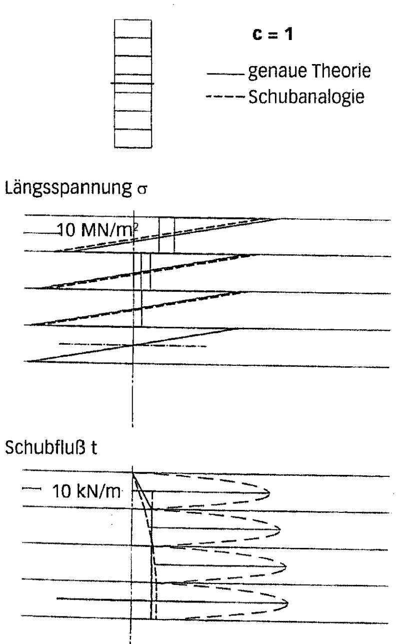


***Bild 8**: Normalspannung σ und Schubfluß t für c = 1, Vergleich genaue Theorie/Schubanalogie; M = 80 kNm, Q = 40 kN*

Die Schnittgrößen M und Q des Trägers B liefern die konstante Normalspannung in der Schicht i und den Schubfuß t.

Bilder 7 und **8** zeigen beispielhaft die Verhältnisse für die Näherungslösung und die genauen Spannungsverläufe.

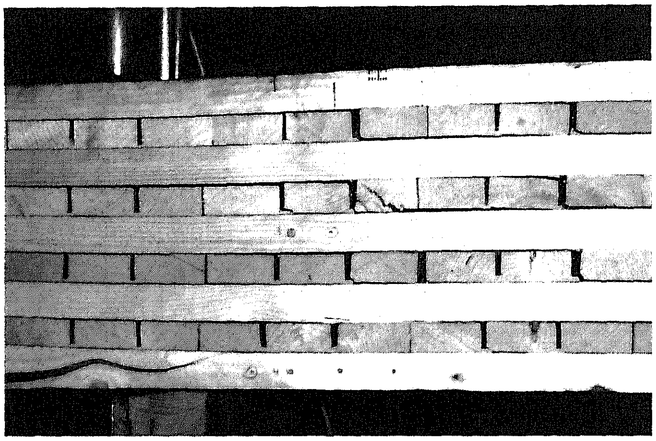


***Bild 9**: Dickholzplatten bestehen aus mehreren Schichten, die kreuzlagig miteinander verleimt werden und je nach Anzahl der Schichten unterschiedlich dick sind. Hier ist „Rollschub" eine offensichtliche Einflußgröße.*

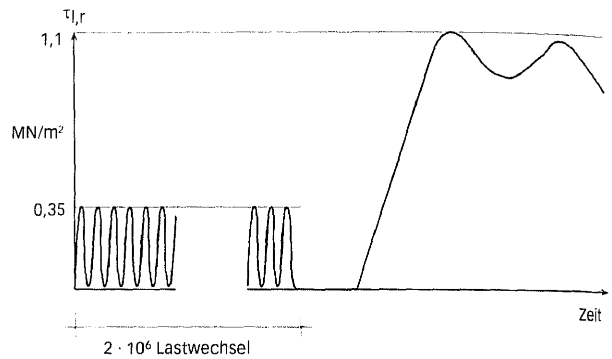
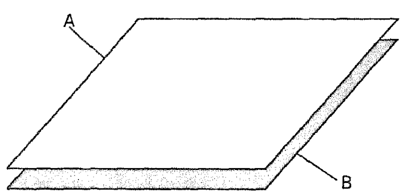


***Bild 11**: Untersuchung von „Rollschub" unter schwellender Belastung mit anschließender Bruchbelastung*



$$B_{Ax} = B_{xE} = \sum B_{xE,i} = \sum E_{x,i} \cdot \frac{d_i^3}{12}$$

$$\sigma_{xi} = \pm \frac{m_{Ax}}{B_{Ax}} \cdot \frac{d_i}{2} \cdot E_{xi}$$

$$B_{Axy} = B_{xyE} = \sum B_{xyE,i} = \sum G_{xy,i} \cdot \frac{d_i^3}{12}$$

$$\tau_{xi} = \pm \frac{m_{Axy}}{B_{Axy}} \cdot \frac{d_i}{2} \cdot G_{xyi}$$

$$B_{Bx} = B_{xS} = \sum B_{xS,i} = \sum E_{x,i} \cdot d_i \cdot z_i^2$$

$$\sigma_{xi} = \frac{m_{Bx}}{B_{Bx}} \cdot E_{xi} \cdot z_i$$

$$B_{Bxy} = B_{xyS} = \sum B_{xyS,i} = \sum 4 \cdot G_{xy,i} \cdot d_i \cdot z_i^2$$

$$\tau_{xyi} = \frac{m_{Bxy}}{B_{Bxy}} \cdot G_{xyi} \cdot z_i$$

***ld 10**: Aufteilung des Flächentragwer-s in zwei Flächen A und B*

Sie zeigen, was zu erwarten war: Zur Schwerachse hin sind die analogen Biegespannungen größer als die tatsächlichen, zum Rand ist es umgekehrt. Bei geringerer Verbindungssteifigkeit *c* wird die Schubsteifigkeit *S* geringer. Der Träger A übernimmt mehr Last, die Biegespannungen und die parabelförmigen Schubspannungen nehmen zu.

Mit der Schubanalogie ist es in guter Näherung möglich rein auf den Querschnitt bezogene Eingangswerte für übliche EDV-Programme zu finden.

Zweiachsige Tragwirkung

Bei zweiachsiger Tragwirkung, wofür die modernen Holzwerkstoffe natürlich prädestiniert sind, lassen sich die vorgestellten Erkenntnisse entsprechend anwenden. **Bild 10** deutet das Vorgehen bei Flächen an. Zur Biege- und Schubsteifigkeit kommt noch die Drillsteifigkeit.

Rollschub

Ein Problem ergibt sich allerdings noch. Es ist der sogenannte „Rollschub". Gemeint ist die Schubbeanspruchung quer zur Holzfaser. Eine „Querholzschicht" findet sich allerdings bei vielen der modernen hölzernen Platten. Hier fehlen genormte Werte. Kreuzinger wies auf die Gefahr des „Rollens" der Holzfasern hin, wobei insbesondere über die Dauerschwingfestigkeit wenig bekannt ist. **Bild 9 und Bild 11** zeigen die Ergebnisse eines entsprechenden Versuches. Verständlicherweise hielt Prof. Kreuzinger sich „bedeckt", Werte zu nennen, die „abgesegnet" in solche Berechnungen eingesetzt werden können. Bei der Abschätzung von Materialkennwerten können Zulassungen von Werkstoffen, die diese Problemzonen aufweisen, Orientierung bieten.

Möglichkeiten nutzen!

Mit den Vorschlägen lassen sich zunächst höchst aufwendig erscheinende Tragwerkskompostionen mit üblichem Aufwand und üblichen Programmen berechnen. Kreuzinger unterstrich seine Aufforderung an das Publikum, davon Gebrauch zu machen, um dem Holzbau neue Möglichkeiten zu erschließen mit den Worten „Keine Angst vor neuen Ideen!". Er stellte in Aussicht, daß die Betrachtung bei den zur Zeit laufenden Überarbeitungen von DIN 1052 und EUROCODE 5 Berücksichtigung finden werden.

Mit der Vorstellung ausgeführter Projekte, die alle mit den besprochenen Problemen behaftet sind, wies er nach, daß die theoretischen Überlegungen bereits gebaute Holzbauzukunft sind.

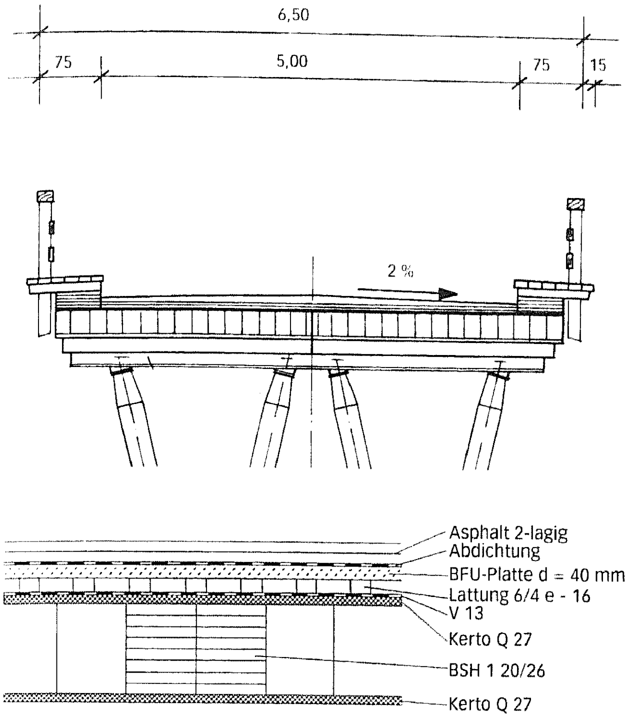


***Bild 12**: Übersichts- und Detailquerschnitt der Brücke über den Sausenden Graben: Verleimte Werkstoff-Komposition mit Plattenwirkung*

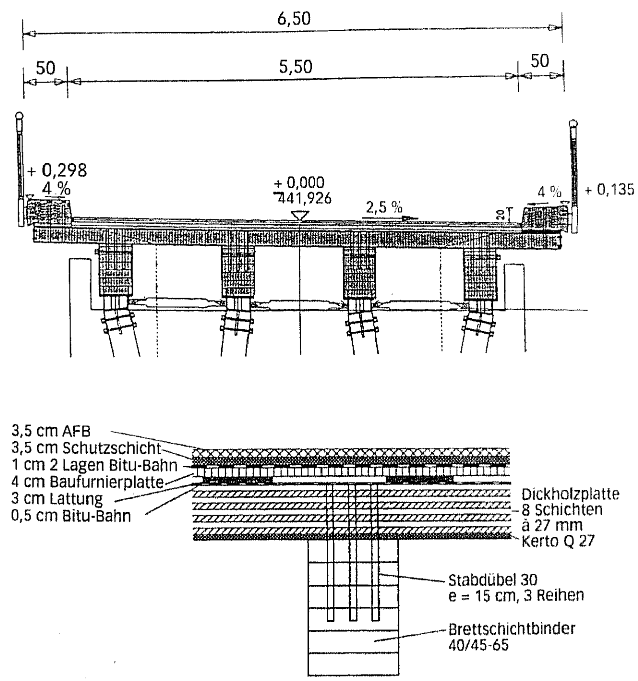


***Bild 13**: Brücke in Ruderting: Holztragwerk als Plattenbalken, wie im Betonbau, mit den Ansätzen von Prof. Kreuzinger ähnlich „leicht" zu berechnen*